

Caudry
14 février 2018



La construction du nombre aux Cycles 1 et 2



Marie-Lise PELTIER
Maître de conférences en didactique des mathématiques
Laboratoire de didactique André Revuz
Université Paris Denis Diderot



Opération Maths
Euro Maths
M.A.T.H.



Site <http://operation.maths.fr>

Marie-Lise Peltier, maître de conférences, didactique des mathématiques

Joël Briand, maître de conférences, didactique des mathématiques

Bernadette Ngonu, maître de conférences, didactique des mathématiques

Marc Sampo, Professeur des écoles

Danielle Vergnes, docteur en didactique des mathématiques

En guise d'introduction

2 scénarios pour introduire l'addition au CP

Scénario 1

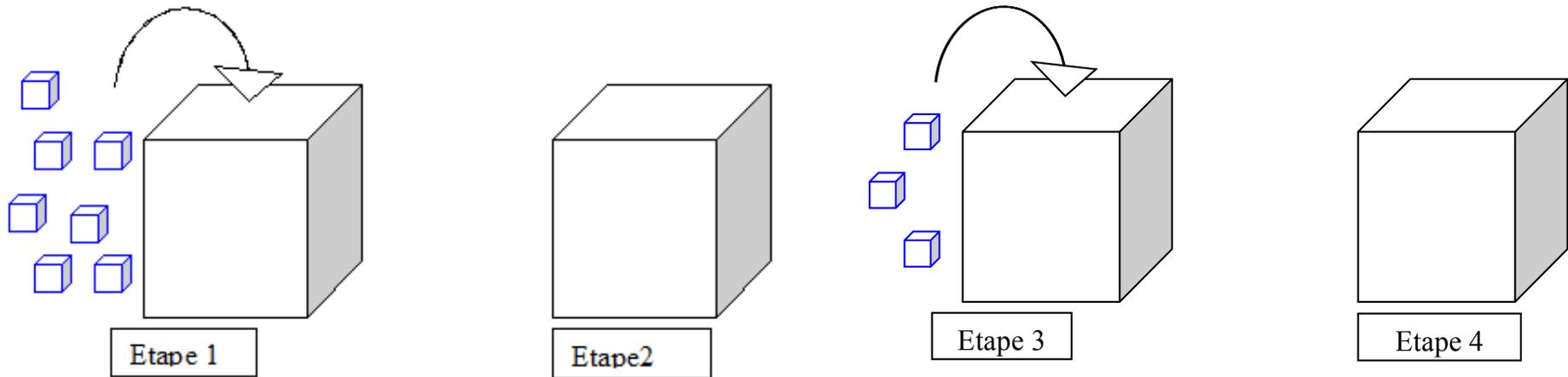


$$7 + 3 = 10$$



Manipulation et comptage
L'écrit traduit l'observation

Scénario 2



$$7+3 = ?$$

On émet des hypothèses

... puis on ouvre la boîte, on vérifie et on écrit :

$$7+3 = 10$$



Représentation, prévision, validation

L'écrit permet la mathématisation

L'observation permet la validation

Le milieu matériel est le même.

Le milieu d'apprentissage est différent.

Scénario 1: ostension du résultat qui permet la mise en œuvre du comptage.

L'écrit vient répéter ce qui a déjà été constaté.

Scénario 2 : évocation des objets, nécessaire pour émettre des hypothèses, stratégies à la charge de chaque élève, validation par confrontation au réel

Les écrits sont un moment de production de savoirs et de modélisation.

Ce qui détermine l'activité mathématique des élèves
ce n'est pas seulement le choix du problème,
c'est aussi sa « mise en scène »

L'activité proposée dans le scénario 1 permet de
comprendre la « règle du jeu », l'écrit est ici inutile

C'est le scénario 2 qui permet la construction du sens de
l'addition et l'introduction d'un écrit fonctionnel

~~Le scénario 1 : pour les élèves en difficultés
Le scénario 2 : pour les autres~~

- Tous les élèves doivent être confrontés**
- au scénario 1 pour comprendre le problème
 - puis au scénario 2 pour apprendre l'addition

C'est ce couple **problème/dispositif** que nous appelons situation d'apprentissage

La présence du matériel permet
l'**appropriation du problème**

La nécessité de **prévoir** ou
d'**anticiper** permet le
développement d'une
activité mentale et oblige
la construction de
procédures de résolution

Le retour à la manipulation
permet la **validation** des
prévisions

La synthèse permet de
la mise en évidence de
l'objet d'apprentissage

Plan de cette intervention

A la lumière des programmes de 2015

I. Quelques constats

II. Le concept de nombre et son évolution

III. Les systèmes de désignation

Numération écrite

Numération orale

partie I

Quelques constats Les programmes de 2015

Constats de terrain et notre position

- Les mathématiques de l'école maternelle et du début du primaire sont tellement culturellement connues qu'il semble à beaucoup que leur enseignement ne pose pas de problème majeur
- Souvent, les activités proposées sont des activités rituelles, des manipulations d'objets, des activités de langage ou d'imitation plus que des activités mathématiques
- **Notre position : l'élève construit des connaissances mathématiques en étant confronté à des situations pour lesquelles ces connaissances constituent des solutions efficaces.**
- Or, plus la notion mathématique est familière (pour l'adulte), plus il nous semble difficile, en tant que professeur, de créer un milieu propice à sa construction.

Pour de multiples raisons (formation réduite, confusion entre évaluation et apprentissage, utilisation massive des sites et des blogs sur internet, etc.) la mise en œuvre, à des moments cruciaux des apprentissages, de situations « clés », permettant la construction effective de connaissances chez les élèves, n'est pas conçue comme une priorité

Les fichiers ou les éventuelles fiches permettent une organisation simple de la classe, des activités différenciées en multi-niveaux, etc.

mais l'efficacité de ce type d'activités dépend des situations « clés » qui ont été abordées ou non

Nécessité de « traquer » les malentendus

Du côté des parents : « *Mon enfant sait compter jusqu'à 19* »

Du côté des médias, parfois de l'institution elle-même : de nombreux discours simplificateurs : « La manipulation permet de comprendre le sens des nombres »

Du côté de l'édition : L'élémentarisation « rampante » de l'école maternelle (manuels, fichiers aux préfaces aguichantes mais aux contenus fossilisés..., évaluations inadaptées).

Du côté de la formation : Une diffusion trop restreinte des résultats de recherches : notamment l'approche « situationniste » des didacticiens c'est-à-dire la construction d'un milieu d'apprentissage adéquat pour l'acquisition de savoirs.

Des pratiques rituelles exacerbées
frises numériques, calendrier, météo, considérées
comme des activités mathématiques et qui prennent
leur place.

.0	.1	.2	.3
.4	.5	.6	.7
.8	.9	10	11

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39



- Présence du « 0 » !...
- Chiffre des dizaines de couleur différente, *comme si cela permettait la construction de la numération,*
- Présentation sous forme de tableaux sans signification pour les élèves,

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

- Doigts, dominos, correspondant à des décompositions différentes « rigidifiées »,
- etc.

Les neurosciences et leur sur-médiatisation

Leurs apports sont incontestables :

- Les mathématiques ne sont pas des constructions arbitraires. Elles sont issues de l'évolution de notre cerveau dans un monde qui a des régularités intéressantes (S.Dehanne 2012) dans les domaines du numérique, du spatial, des probabilités.
 - Le spatial et le numérique sont étroitement liés
 - Le nombre est le résultat d'une longue construction intellectuelle.
 - Les jeux classiques créent un environnement propice au développement de compétences numériques...
- Mais elles n'ont pas vocation à apporter des méthodes d'apprentissage en milieu scolaire.

Importance des situations d'apprentissage par adaptation

Il s'agit de construire des dispositifs adaptés à l'âge, aux connaissances, et aux intérêts des élèves concernés et qui abordent plusieurs types d'enjeux :

Enjeux de savoirs : le savoir visé est la solution optimale au problème posé.

Les enfants réfléchissent. Ils peuvent se rendre compte par eux-mêmes de leurs erreurs.

Or : « plus les élèves sont en difficulté plus on les plonge dans du déjà fait, du déjà vu, de l'entraînement. » rapport sur l'individualisation (CNEESCO sep 2016)

Enjeux langagiers : la production de signes permet de concevoir un monde, de décontextualiser, de dépersonnaliser. (cf : la secondarisation).

Enjeux sociaux : à un moment donné, l'élève aura à écouter, à lire l'autre, à collaborer avec lui.

Enjeux éthiques : engagés dans une telle situation, les élèves cherchent à savoir, à comprendre, à accepter et respecter l'action d'autres élèves.

Fréquence de ces situations

Ces situations « clés » sont suivies de séquences de classe au cours desquelles l'élève aura à :

identifier les savoirs acquis
apprendre et retenir
s'entraîner

- Elles n'excluent pas les situations d'apprentissage par familiarisation
- C'est au professeur de faire des choix en fonction de sa classe

Ce que le manuel doit alors permettre trois milieux emboîtés pour les moments clés

The illustration shows a classroom activity. A teacher is demonstrating how to use a purple box with yellow tokens. Three children are participating: a girl with glasses, a girl with a ponytail, and a boy. They are standing around a table with a blue box and yellow tokens. The girl with glasses says 'Je mets 4 jetons.' The girl with the ponytail says 'Je mets 5 jetons.' The boy says 'Je mets 5 jetons.'

Manipulation

DE L'ORAL À L'ÉCRIT

Dans ce jeu, tu prévois le nombre de jetons sans l'ouvrir.

Je mets 4 jetons.

Je mets 5 jetons.

Je mets 5 jetons.

Le travail avec les objets

L'évocation à l'aide d'images et de textes

Qu'a-t-il maintenant dans la tirelire ?

Complète : $4 + 2 + 5 = \dots$

L'écriture formelle

Le programme du Cycle 1 de 2015

extraits

- Apprendre ensemble pour vivre ensemble
- Des modalités spécifiques d'apprentissage
 - Apprendre en jouant
 - Apprendre en réfléchissant et en résolvant des problèmes
 - Apprendre en s'exerçant
 - Apprendre en se remémorant et en mémorisant
- Mobiliser le langage dans toutes ses dimensions

Organiser et prendre des repères poser les bases d'une première culture mathématique, scientifique technologique

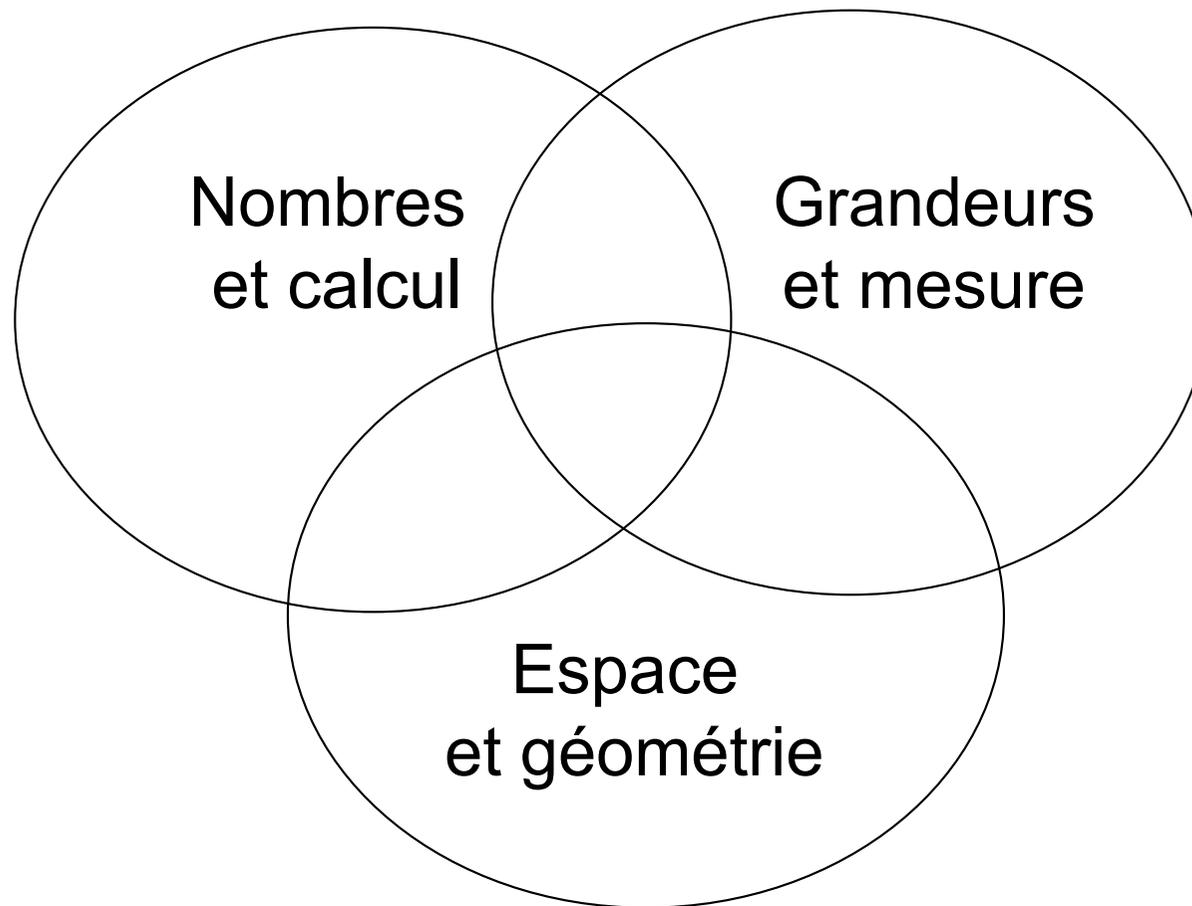
- Organiser et structurer les quantités
 - Évaluer et comparer globalement des grandeurs de toutes natures (longueurs, collections d'objets...)
 - Associer des quantités à des symboles verbaux ou écrits
 - Dénombrer une collection
 - Situer une position ou un rang dans une série
 - Résoudre des problèmes portant sur les quantités
- Comparer trier, identifier des formes et des grandeurs
- Se repérer dans l'espace et le temps

Le programme du cycle 2 2016

En mathématiques, 6 compétences se déclinent de la maternelle à l'université

- Chercher
- Modéliser
- Représenter
- Raisonner
- Calculer
- Communiquer

3 domaines imbriqués



La rubrique « organisation et gestion de données »
est intégrée à chacun des domaines

Un accent mis sur 3 points essentiels

- L'articulation très forte entre nombres et grandeurs qui entraîne un point de vue de la résolution de problème en tant qu'activité de modélisation de situations faisant intervenir les grandeurs.
- L'étude de différentes représentations des nombres, qu'elles soient langagières ou symboliques (désignations orales, décompositions/ recompositions, demi droite graduée..) et de leurs liens

- Un point de vue sur le calcul qui est la conséquence des deux points précédents :
 - le calcul est "motivé" par les situations qu'il permet de résoudre (sans manipulations),
 - il est nourri des équivalences entre les différentes désignations des nombres.

De ce fait les techniques opératoires usuelles n'interviennent que lorsque le besoin s'en fait sentir, progressivement sur les 3 années du cycle 2 et le CM1.

Partie II

Le concept de nombre et son évolution

« Un nombre,
c'est quoi exactement ?.... »



Quelques réponses souvent entendues...

~~17 est un nombre
mais pas 7
7 c'est un chiffre~~

Un nombre est
composé de un
ou plusieurs
chiffres

Un nombre
c'est un numéro

Les nombres
servent à
compter

Un nombre
caractérise
une quantité

Les nombres
servent à donner
le résultat d'une
mesure

Considère-t-on
que 0 est un
nombre?

- Des réponses en termes de « désignation »
- Des réponses en termes de « fonction »

Mais de grandes difficultés à en donner une « définition » malgré l'existence de définitions mathématiques (abstraites et liées à la théorie de référence)

Les nombres entiers « mesurent » la taille de collections discrètes

Les nombres sont

- des outils qui donnent un formidable pouvoir sur « le monde »
- des objets d'étude

Les fonctions du nombre

- Le nombre « **mémoire** »
 - d'une quantité en la dénombrant
 - d'une grandeur en la mesurant
 - d'une position en la repérant
- Le nombre pour **comparer**
 - des quantités
 - des grandeurs
- Le nombre pour **calculer...**
dans des situations de prévision, d'anticipation ou de vérification

Nécessité absolue de ne pas rabattre le travail sur le nombre aux activités de dénombrement et/ou à l'étude de leurs désignations

Le dénombrement

Le dénombrement est le fait **d'associer un nombre à une collection d'objets,**
indépendamment de la manière de le faire,
c'est la mesure de la taille d'une collections, ou
encore la mesure d'une quantité discrète

Il faut éviter de confondre le but et les moyens de
l'atteindre

Cette définition n'introduit aucune manière privilégiée
de faire cette association.

Les procédures de dénombrement sont nombreuses et variées. Il ne faudrait pas penser que seul le comptage permet de dénombrer les éléments d'une collection.

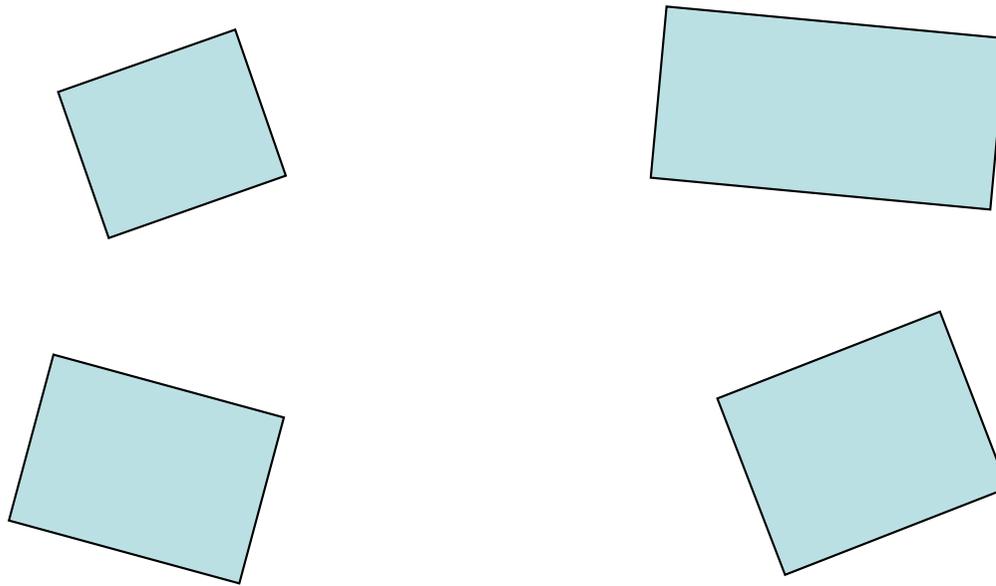
Ce résultat est bien connu depuis les années 1975-95. (*Travaux des équipes INRP, travaux de C.Meljac, de G.Brousseau et all.*)

Le comptage est une procédure de dénombrement possible et culturellement reconnue, il correspond au modèle spontané d'enseignement, il est souvent pratiqué dans les classes.

Son enseignement prématuré peut constituer un obstacle (didactique) à la construction du nombre.

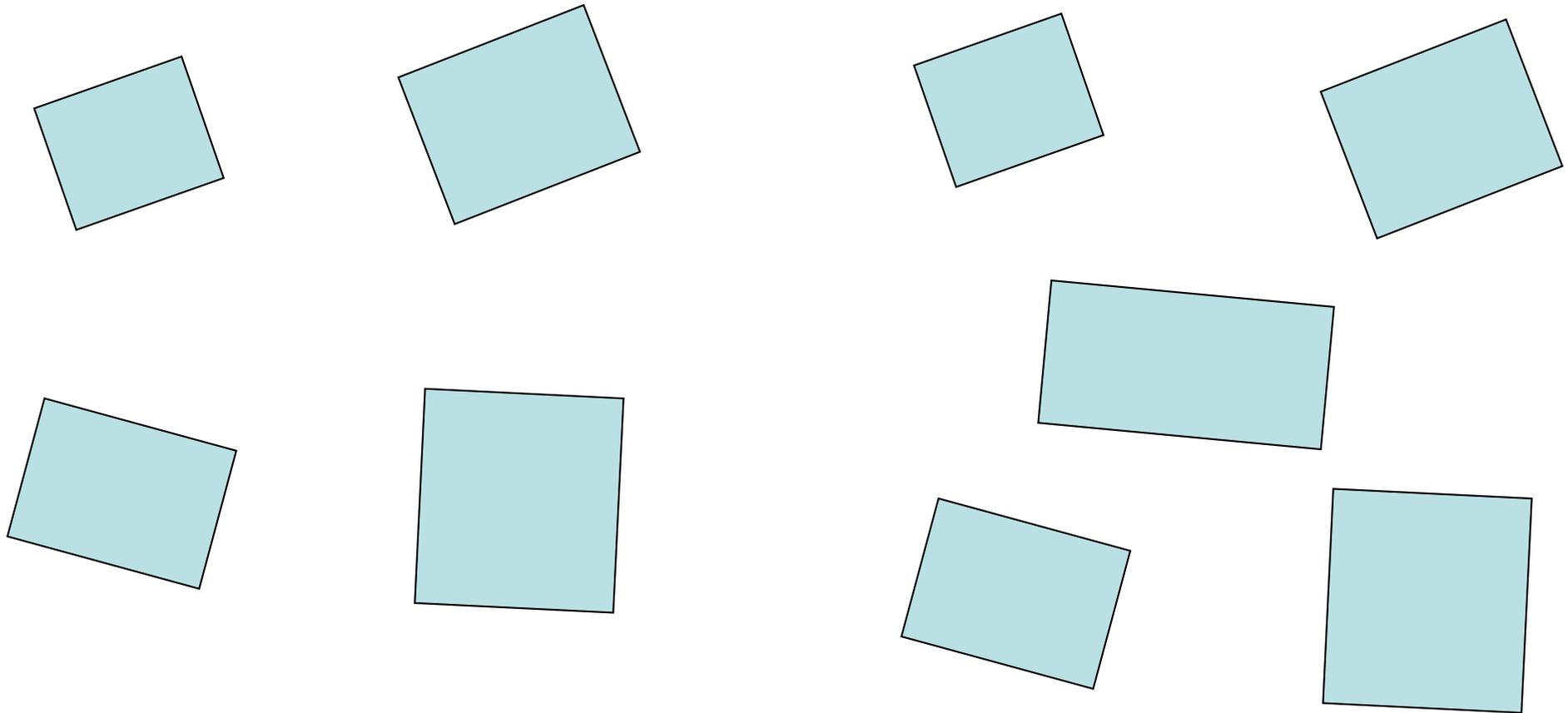
Dénombrer ...

Combien de rectangles sur cette diapositive ?



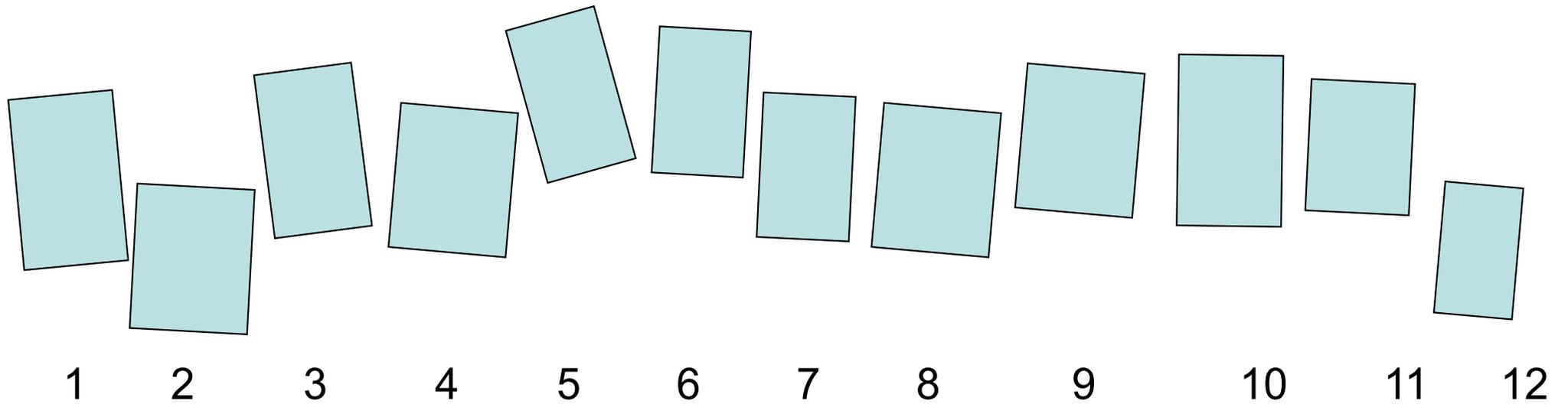
Perception globale quasi immédiate:
4 rectangles

Et sur celle-ci ?



Perception et composition
4 rectangles et 5 rectangles, c'est 9 rectangles

Et sur celle-ci ?



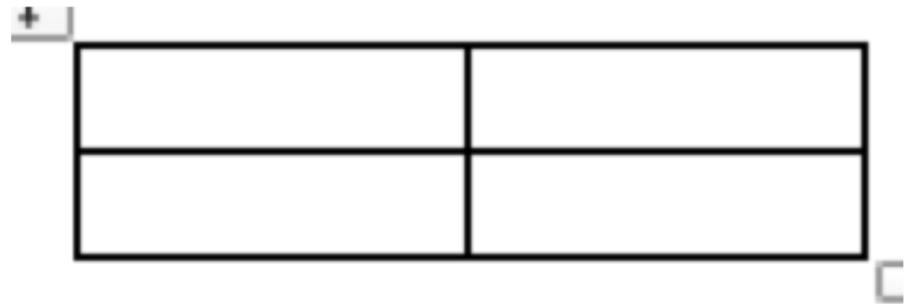
Comptage numérotage : 12 rectangles

Et combien de rectangles dans cette figure?



S'entendre sur ce qu'on va appeler un rectangle

Et dans celle-ci?



- Organiser la collection de rectangles pour les compter, c'est à dire réaliser une partition de la collection
- Trouver le nombre de rectangles dans chaque classe

Les petits rectangles : 4

Les rectangles composés de 2 petits rectangles en ligne : 2
en colonne : 2

Les rectangles composés de 3 petits rectangles : 0

Les rectangles composés de 4 petits rectangles : 1

soit $4+2+2+1$ rectangles, c'est à dire 9 rectangles

Donc différentes manières de dénombrer

1. La perception globale pour les petites quantités

2. Le comptage numérotage est l'activité qui consiste à associer à chaque mot nombre « *un, deux, trois...* » un objet et un seul (correspondance un à un)

Le comptage un à un au sens de GELMAN (1983)

Il repose sur 5 principes :

1. *Le principe d'ordre stable*
2. *Le principe de correspondance terme à terme*
3. *Le principe cardinal*
4. *Le principe de non-pertinence de l'ordre*
5. *Le principe d'abstraction.*

3. Le principe d'itération de l'unité

Deux, c'est un et encore un, trois c'est deux et encore un

4. Les compositions correspondant à une partition de la collection

- non organisée : *deux et trois et deux*

- organisée : *deux et deux et deux*

- organisée conventionnelles : *dix et dix et cinq*

3 centaines 7 dizaines et 8 unités

5. Le calcul : un rectangle de 6 lignes et 7 colonnes contient 6x7 cases

6. Et plus tard L'analyse combinatoire, etc..

7. L'estimation pour les très grandes quantités

Ainsi, la faculté de dénombrer « sur ordre » (y compris celle d'annoncer le nombre d'objets à l'issue du dénombrement) n'implique pas toujours un usage spontané du nombre pour « garder la mémoire » des quantités. On peut affirmer que, pour certains élèves, les mots nombres qu'ils connaissent (à leur manière) restent à « quantifier » et à arithmétiser »

Guy Brousseau

« La situation fondamentale » du nombre

- C'est en travaillant les différentes fonctions du nombre que se développent les compétences en dénombrement et non le contraire
- Le DENOMBREMENT à l'école maternelle d'un point de vue didactique (BROUSSEAU 1984) :

C'est la capacité à produire une collection (C2) équipotente à une collection donnée (C1) sans voir cette collection au moment où l'on produit la collection (C2) mais en se servant du cardinal de la collection (C1).

« Aller chercher en un seul voyage juste ce qu'il faut pour... »

Voitures et garages

S1. L'élève produit une collection d'objets équipotente à une collection de référence, hors la présence de cette dernière : le nombre est la solution

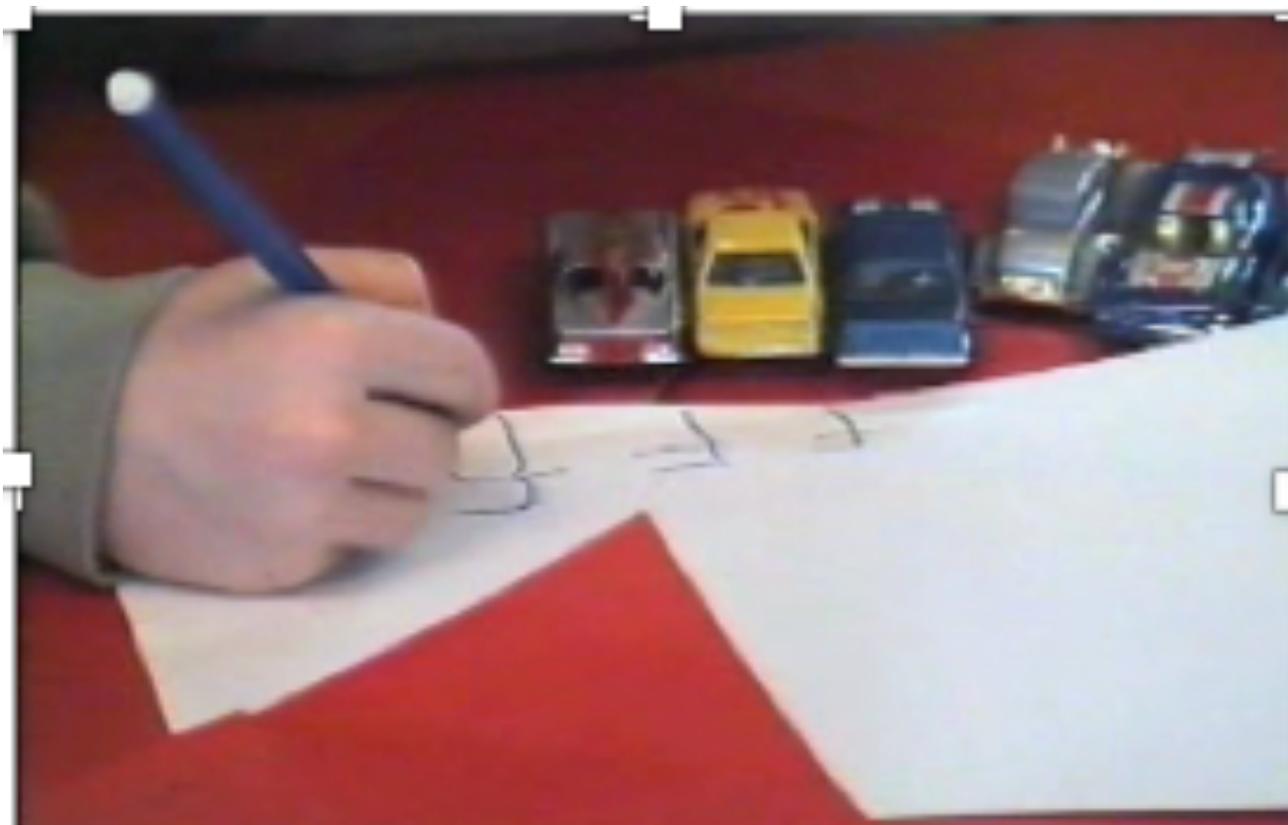


Pour que cette situation produise comme savoir le nombre, il faudra faire évoluer le milieu d'apprentissage afin de passer de l'estimation globale au comptage puis au nombre construit. L'écrit joue un rôle déterminant.

Ce n'est donc pas « une » séance, mais une suite de séances qui constitue la situation.

C'est un long chantier qui commence...

S2. - Modifier le milieu d'apprentissage pour faire changer de stratégie : une trace écrite à élaborer pour soi



« Les voitures seront prises plus tard. Vous n'aurez plus les parkings. Pour vous souvenir, vous pourrez écrire ».

S3. Puis une trace écrite à élaborer pour un lecteur

« Ce n'est plus vous qui irez chercher les voitures ; vous porterez votre message qui sera lu par un camarade. Il vous donnera les voitures ».

*Les garagistes « lecteurs »
préparent les voitures en
fonction du message reçu*



La phase de vérification

Vérification



L'évolution des traces écrites vers le nombre est un processus lent.

Recherche : dans une classe de CP début d'année.

En 1991

	Jusqu'où sais-tu compter ?	Situation fonda- mentale
Noms	N	pots
Alexandre	39	12
Christelle	39	9
Damien	14	5
Paul	25	6
David	24	7
Florian	15	9
Maud	20	13
Mylène	45	17
Sandra	22	7
M.Laure	28	19
ChloÉ	39	19
Eugénie	49	9
Claire	39	6
Claire G	30	13
Cyril	59	19
Frédéric	30	14
Marianne	18	9
Christian	59	14
Cédric	59	9
Mathilde	29	6

En 2012

	Cpt	SF
Tom	50	12
Léo	59	8
Léa	27	6
Valentine	39	9
Naomi	39	4
Amandine	22	14
Margot	29	15
Arthur	25	6
Andréa	29	17
Noam	24	11
Hugo	49	19
Julien	24	19
Manon	49	8
Lorenzo	15	4
Paul	50	14
Antoine	50	10
Raphaël	69	11
Lylvian	59	8
Anthony	39	7
Maeva	13	8
Lucas	100	16
Nolwenn	49	8
Mike	14	11
Pierre	50	9
Thomas	39	8
Anthoni	73	11
Cassiopée	60	8

Les compétences à développer parallèlement

- Maîtriser la comptine numérique orale et sa structure arithmétique

Elle s'acquiert par imprégnation, par paliers

Elle est dialectiquement

- un objet que l'on étudie

- on compte en croissant à partir de 1, de n,
- on compte de 2 en 2,
- on compte en décroissant
- on dit le suivant, le précédent,
- on va le plus loin possible,
- on cherche les régularités....

- un outil pour résoudre des problèmes.

- Utiliser la comptine dans le dénombrement d'une collection donnée
 - coordination entre le geste et la parole (principe de bijection),
 - principe de cardinalité
 - principe d'abstraction
 - principe de non pertinence de l'ordre

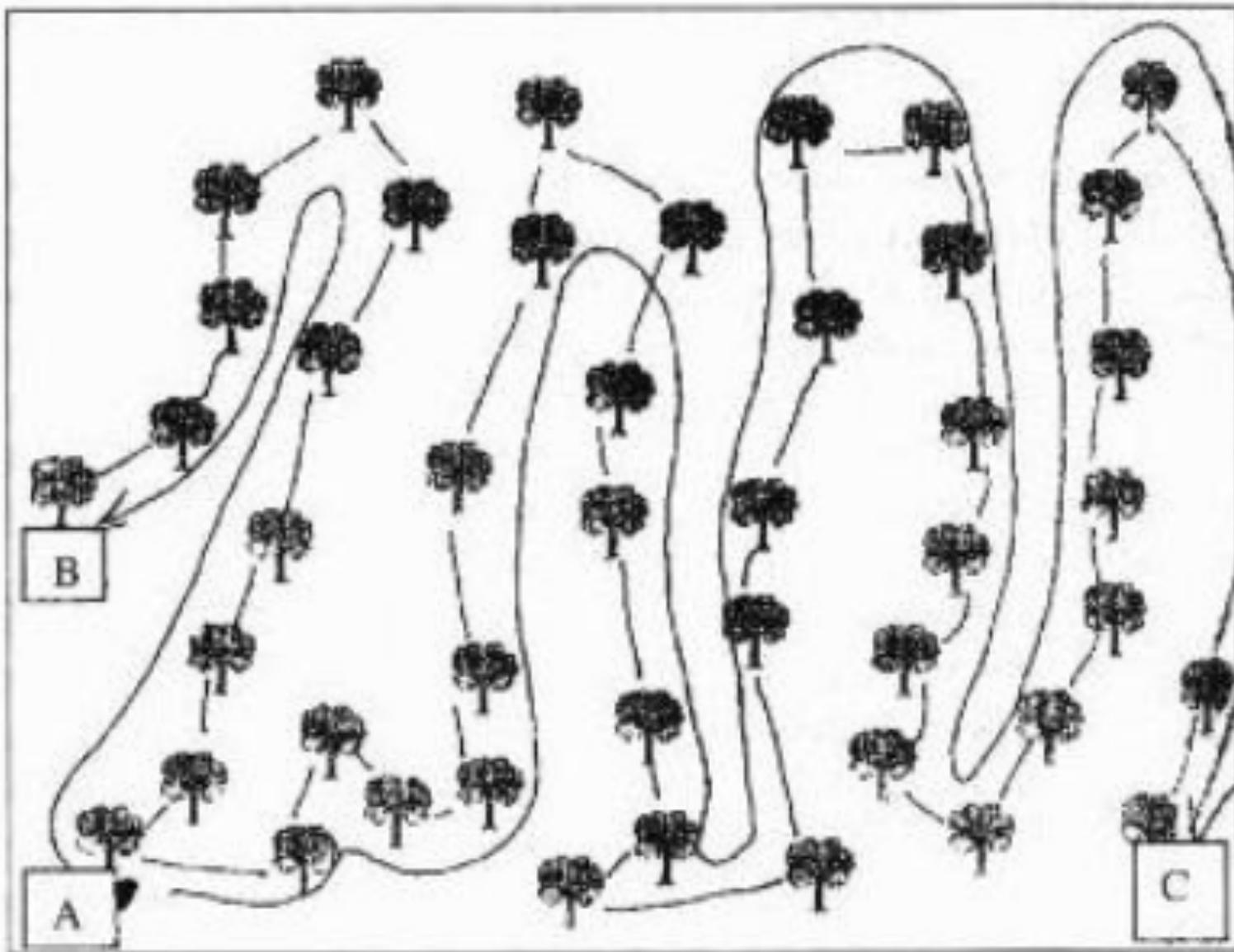
- Organiser le dénombrement : séparer ce qui est compté de ce qu'il reste à compter

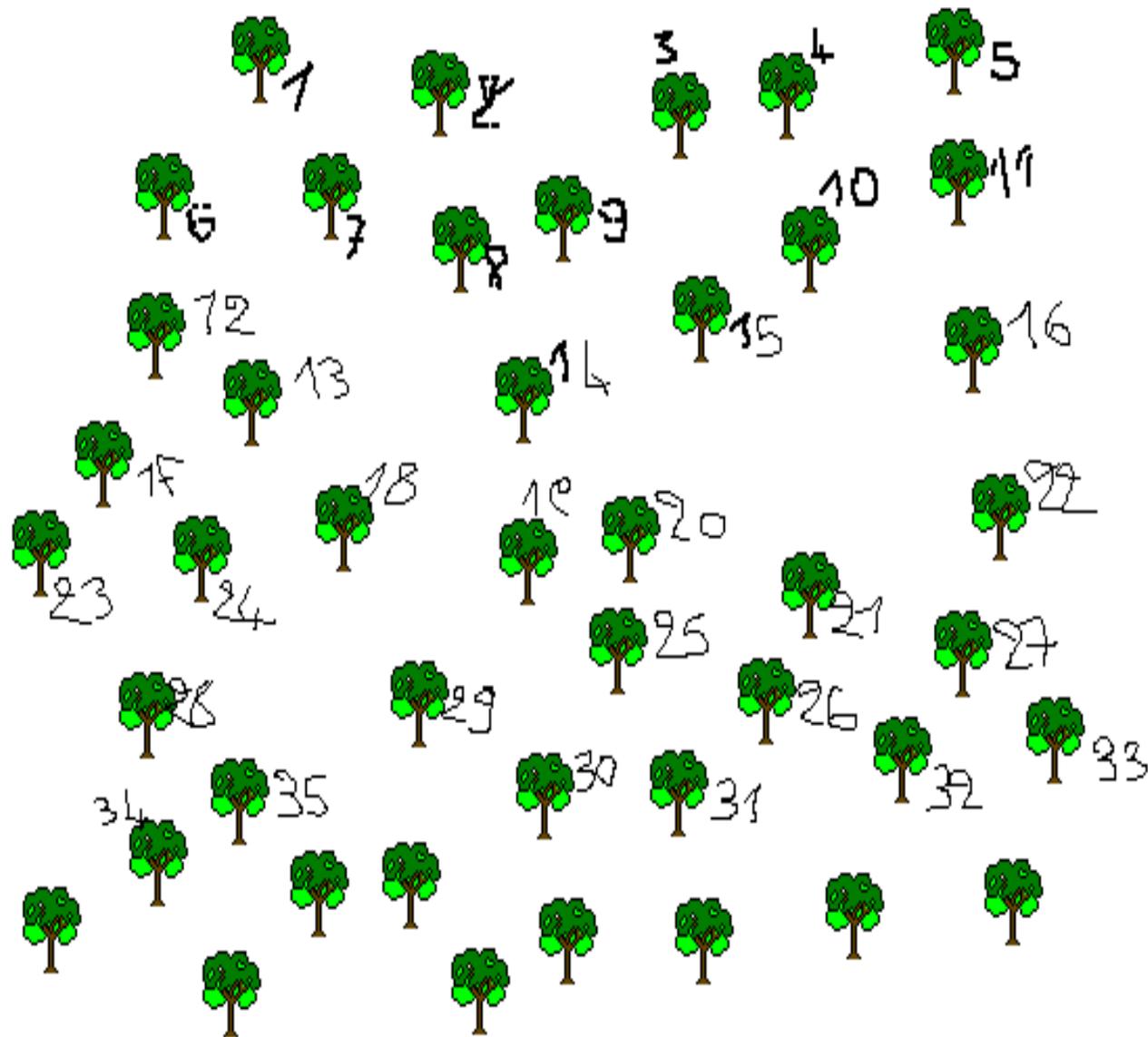
Il faut donc être capable de

- *Distinguer deux éléments différents d'une collection donnée*
- *Choisir un élément de cette collection*
- Énoncer un mot-nombre (« un » ou le successeur du précédent dans une suite de mots-nombres)
- *Conserver la mémoire de la collection des éléments déjà choisis*
- *Concevoir la collection des objets non encore choisis*
- Recommencer (pour la collection des objets non encore choisis) les 4 points qui précèdent tant que la collection des objets à choisir n'est pas vide
- *Savoir que l'on a choisi le dernier élément*
- Énoncer le dernier mot-nombre en tant que nombre d'éléments de la collection.

Les résultats des recherches montrent

- plusieurs types de procédures utilisées par les enfants de GS et CP dans le cas de collections d'objets non déplaçables
 - le marquage
 - le chaînage
 - les groupements
 - et des procédures mixtes
- une très grande hétérogénéité des savoirs enfantins





L'enfant échoue alors qu'il dispose de la suite numérique et d'un procédé d'exploration relativement bien organisé (lignes conçues).

Il s'agit donc d'une absence de connaissance désignée par J. Briand par le terme *énumération*, qui se manifeste par une absence de synchronisation effective entre

- une connaissance numérique
- et une organisation conjointe de la collection qui empêche *l'inventaire* de la collection.

L'énumération

une connaissance spécifique de nature spatiale
nécessaire au « savoir dénombrer » peu enseignée
à l'école

« Dans certaines situations, l'élève a besoin de connaissances que l'école n'enseigne pas, mais qu'il doit pourtant mettre en œuvre pour apprendre le savoir ou pour utiliser ce qu'il a appris. » Y.Chevallard.

Peut-on construire des situations spécifiques pour travailler cette connaissance ?

exemple

- Les boîtes d'allumettes



- Premier essai



- Deuxième essai



Et il reste des effets induits non prévus !



Le milieu matériel peut résoudre le problème à l'insu de l'élève...

Faire évoluer les situations pour nécessiter la production d'écrits : *les boîtes sont fixées*



La prise en compte de cette compétence dans le programme



CONSEIL SUPÉRIEUR DES PROGRAMMES

L'énumération est la capacité à parcourir tous les objets d'une collection une fois et une seule fois. Cette capacité intervient dans toutes les situations où l'enfant doit faire la différence entre ce qui est déjà compté, par exemple le nombre d'objets rapportés par équipe, et ce qui ne l'est pas. L'enfant doit être capable de synchroniser la récitation de la suite des mots nombres avec le pointage des objets à dénombrer. Cette capacité doit être enseignée selon différentes modalités en faisant varier la nature des collections et leur organisation spatiale car les stratégies ne sont pas les mêmes selon que les objets sont déplaçables ou non (mettre dans une boîte, poser sur une autre table), et selon leur disposition : collection organisée dans l'espace ou non (ballons dans la cour, collection organisée-alignée sur une feuille ou pas). La connaissance de ces différentes stratégies est nécessaire dans les activités de dénombrement pour ne pas imputer aux enfants « un manque d'organisation ».

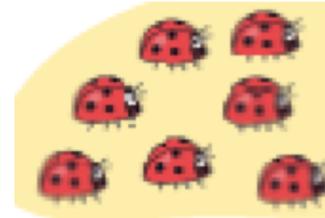
Dès le début du cycle C2 :

Imbrication entre

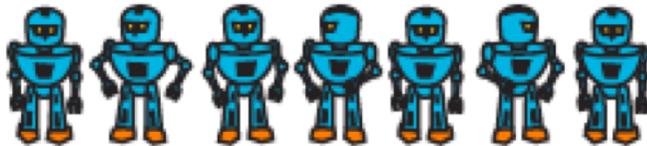
- le travail sur les collections : dénombrement, complétion, extraction, réunion, fractionnement
- les modes de représentation : constellations, matériels de numération, abaques, piste numérique puis droite graduée
- les modes de désignation

Des collections d'objets **manipulables ou représentées**

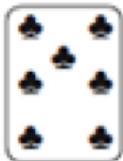
- désorganisées



- organisées

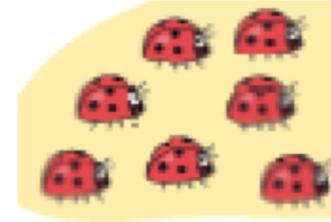


- sous forme de constellations de référence...

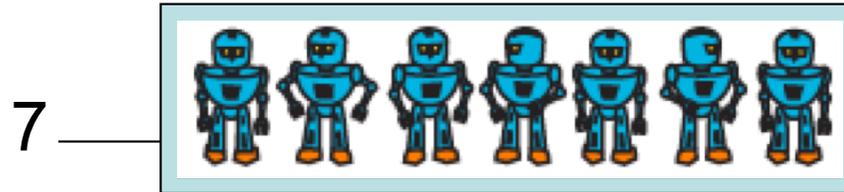


...conduisant à des **modes de désignation variés**

- orale : il y a « sept » coccinelles



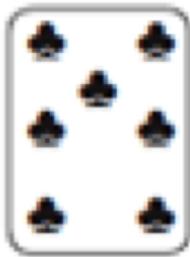
- chiffrée



- en lien avec la représentation linéaire des nombres



- sous forme additive



$$6+1$$



$$2+5$$



$$3+4$$

Le travail sur **les compositions et décompositions des nombres** en lien avec les réunions et fractionnements de collections est mis en avant dans les programmes

Exemple en CP « la bonne carte » ou « le bon panier »

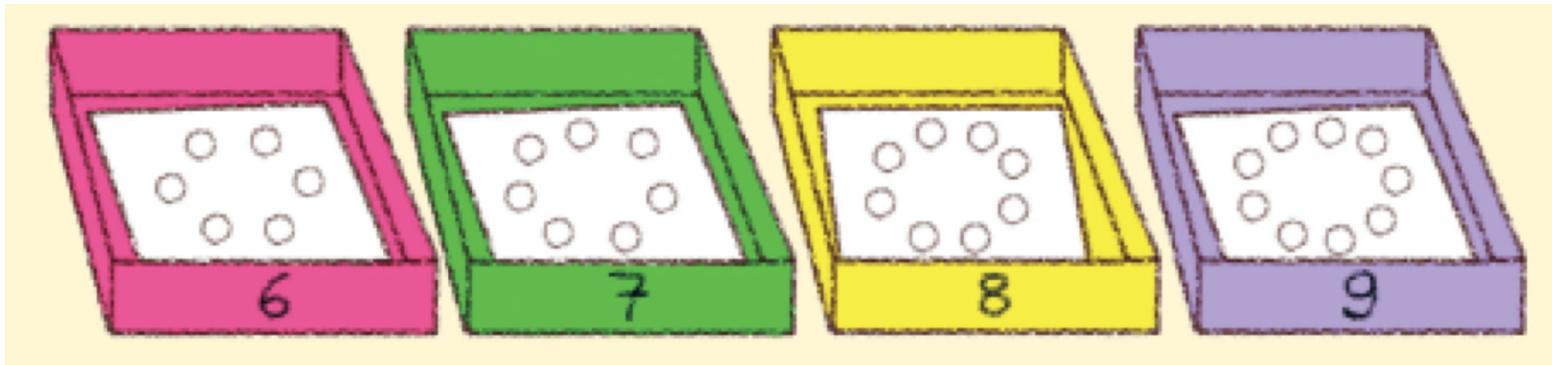
au début de CP (reprise de GS) : le bon panier
Les paniers sont disponibles sur la table.



Les paniers sont éloignés dans des boîtes étiquetées avec le nombre d'œufs des paniers qu'elles contiennent.



Puis ce travail est repris à l'écrit



Rose a le message $6 + 3$. Dans
quelle boîte prend-elle une carte ? ..

 **Colorie** les ronds pour vérifier.

 **Complète** : $6 + 3 = \dots$

Ces premiers faits numériques vont permettre d'établir puis de mémoriser le répertoire additif par étapes

● Le jeu du recto-verso

Manipulation

DE L'ORAL À L'ÉCRIT

Quand tu joues, tu commences à retenir la table d'addition.

$5 + 3$	<input type="text" value="....."/>	$3 + 4$	<input type="text" value="....."/>	$5 + 5$	<input type="text" value="....."/>
$5 + 4$	<input type="text" value="....."/>	$3 + 2$	<input type="text" value="....."/>	$5 + 1$	<input type="text" value="....."/>
		$2 + 5$	<input type="text" value="....."/>	$2 + 3$	<input type="text" value="....."/>

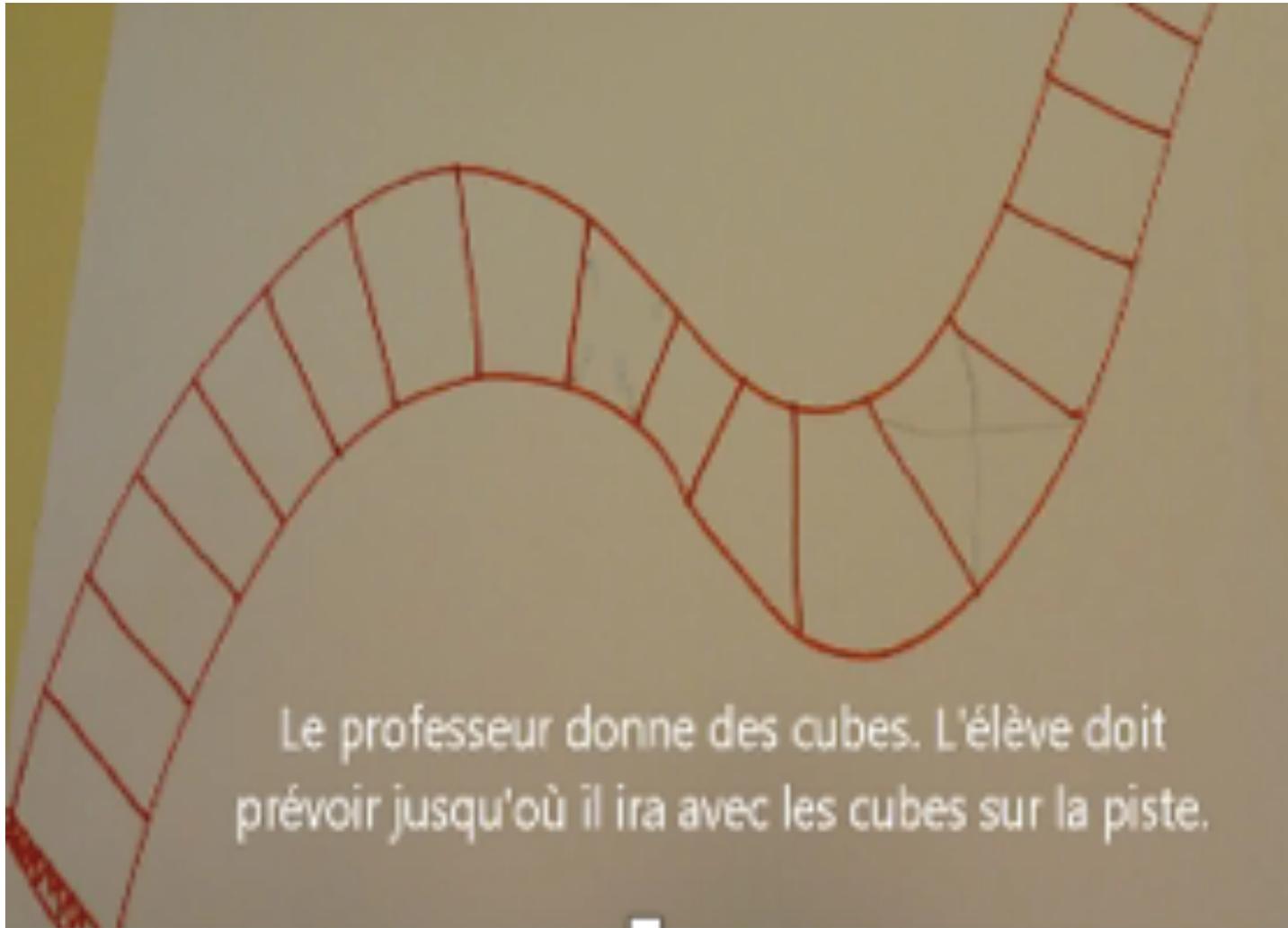


1  Écris le nombre sur la face **bleue**.

2 Retrouve les cartes qui ont 4 sur leur verso.

<input type="text" value="..."/> + <input type="text" value="..."/>	<input type="text" value="4"/>	<input type="text" value="..."/> + <input type="text" value="..."/>	<input type="text" value="4"/>	<input type="text" value="..."/> + <input type="text" value="..."/>	<input type="text" value="4"/>
---	--------------------------------	---	--------------------------------	---	--------------------------------

Comprendre que le nombre permet de repérer une position dans une file



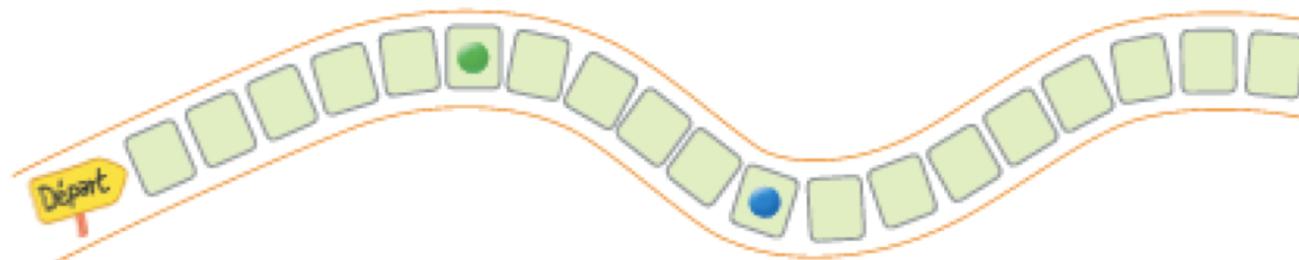
Puis reprise à l'écrit



Pour avancer sur la piste du jeu, tu poses un caillou sur chaque carte.

1 Voici les cailloux de Rose : 
Sur quelle carte arrive-t-elle ?  Dessine-la. 

2 Les cartes sont retournées.



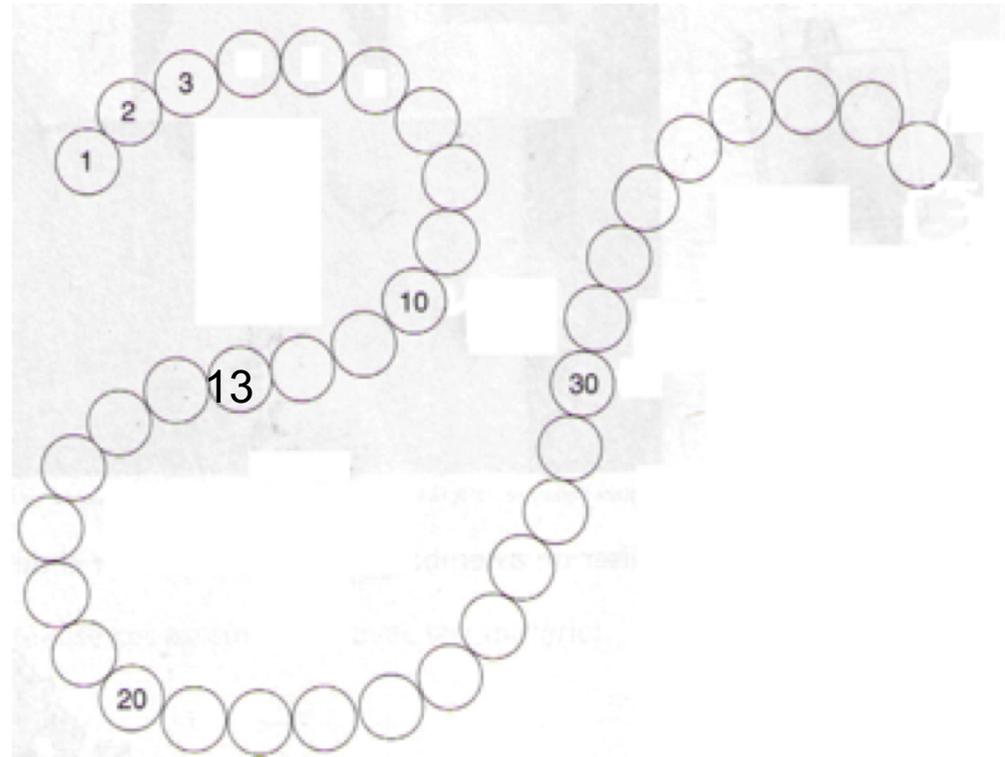
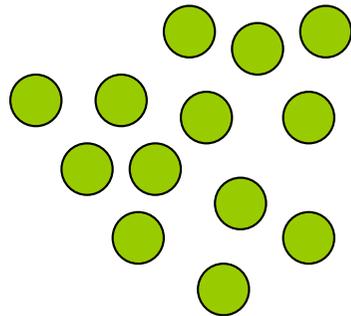
 Entoure le dessin de la carte .



 Entoure le dessin de la carte .



Ce lien entre cardinal et ordinal par le biais du travail sur la piste des nombres est rappelé dans les programmes



il permet de

- lier nombre et repérage de la position dans une file, sur une piste, sur une droite graduée
- de disposer d'un premier outil liant l'ordre et la comparaison

$$13 < 20$$

car 13 est avant 20 sur la piste

Partie III

L'étude des systèmes de numération
des nombres entiers :
un incontournable pour la maîtrise du calcul

le CP : vers une « nouvelle » lecture du nombre

Il est classique de voir un élève

- lire l'étiquette « 18 » en énonçant « dix huit »
- et considérer simultanément que 18 c'est $1 + 8$ (donc c'est 9 !)

sans voir l'incompatibilité entre ces deux lectures.

On constate donc que ce signe « 18 » a une signification pour l'élève qui n'est pas « stable »

Pour que l'élève s'approprie la signification souhaitée de ce « signe », un discours magistral n'est pas suffisant.

Il faut construire des situations qui permettent cette appropriation et accompagnent ce changement d'interprétation des signes connus « 1 » et « 8 ».

Illustrons ce propos



Extraits de cette situation d'évaluation



On voit ici un point fondamental :

L'acquisition du concept de nombre et l'étude de la « numération » ou plutôt des « numérations » sont bien sûr imbriquées mais ne relèvent pas des mêmes types de tâches car ces deux objets ne sont pas de même nature

Le nombre est une « grandeur »

il se définit comme propriété commune à diverses collections d'objets et prend son sens par les fonctions qu'il assure

Mais naturellement il doit être « dit » ou « écrit » et donc se pose la question de la manière de le « désigner »

Les numérations sont les systèmes organisés de codage des nombres mais il existe d'autres formes de désignation qui font intervenir le calcul

Des difficultés récurrentes en numération quelques exemples

- Dans le passage oral/écrit
soixante sept écrit 607
- Dans l'interprétation des chiffres qui composent
l'écriture d'un nombre :
un mauvais score au problème
« *Avec 74 billes combien de sacs de 10 billes
peut-on constituer? »*
- Dans la prise en compte des zéros comme marquant
des groupements absents, *notamment dans les
opérations posées...*

Rappel rapide sur les systèmes de numération

- Deux systèmes
 - la numération écrite en chiffres
 - la numération orale ou écrite en lettres
- Ces deux systèmes sont comme deux « langues »
 - le fait de passer de l'un à l'autre relève de la traduction et non de la lecture/dictée

Décalage entre l'oral et l'écrit

- important
 - qui s'inverse au cours du cycle 2.
-
- Au début du cycle C2 les élèves connaissent beaucoup plus loin la suite orale que la suite chiffrée (au moins 30 contre 10 environ)
 - En fin de CP, la suite chiffrée est bien connue jusque vers 100 alors que pour beaucoup la suite orale au-delà de 69 est difficile

CP : Début de l'étude des règles de numération écrite

CE1 : Début de l'étude des règles de numération orale

CE2 : Extension du champ numérique

1. La numération chiffrée

- dix chiffres (permettant d'écrire n'importe quel nombre)
- mode de groupements itérés par dix (numération décimale)
- règles de juxtaposition des chiffres pour former des nombres :

la valeur des chiffres dépend de leur position
(numération de position)

Les unités de numération sont des « unités de compte » : on compte les dizaines, comme on compte les unités

L'importance de l'étude des différentes unités de numération est rappelée dans les programmes

Comment travailler la numération écrite?

Pour que le groupement par dix soit une procédure « **qui vaille le coup** » le nombre d'objets à dénombrer doit dépasser la vingtaine...

Les différents matériels pédagogiques (indispensables) ont tous des avantages et des inconvénients

Quelques questions à se poser

- qui assure le groupement?
- y a-t-il échange?
- si oui, peut-on vérifier, après échange, la conservation de la quantité initiale?

....

Le travail sur la « dizaine » puis sur la « centaine » est fondamental

- avec du matériel manipulé puis représenté
- en décrivant le matériel
- en donnant dans l'ordre ou le désordre la décomposition en unités de numération
- en écrivant la décomposition additive
- en donnant l'écriture chiffrée



matériel représenté

3 enveloppes centaines, 2 plaques dizaines et 5 unités

matériel évoqué

3 centaines, 2 dizaines et 5 unités

décomposition en unités de numération

$300 + 20 + 5$

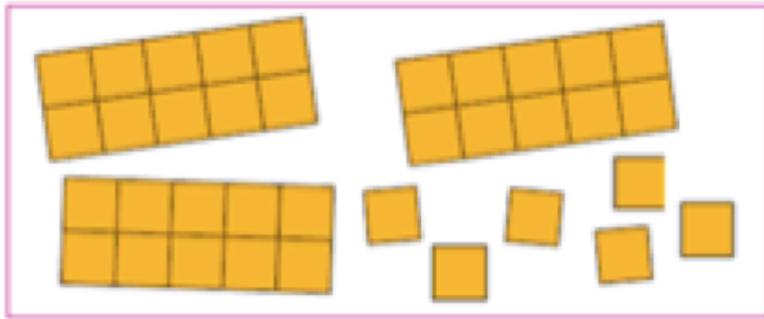
décomposition additive

325

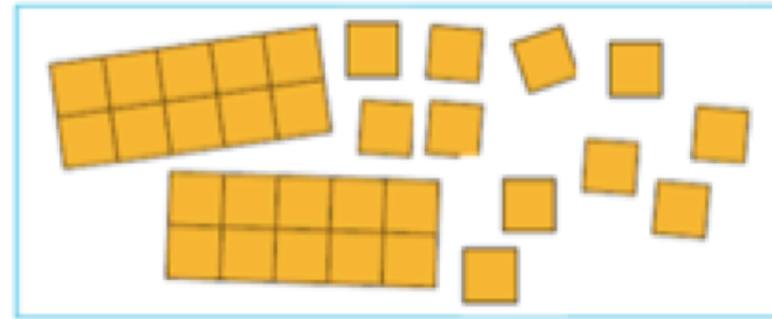
écriture en chiffres

Un exemple au CP

Le jeu de la dizaine (échange 10 contre 1)



Rose



Liam

Pour calculer les scores, les élèves peuvent utiliser des procédures de différents niveaux :

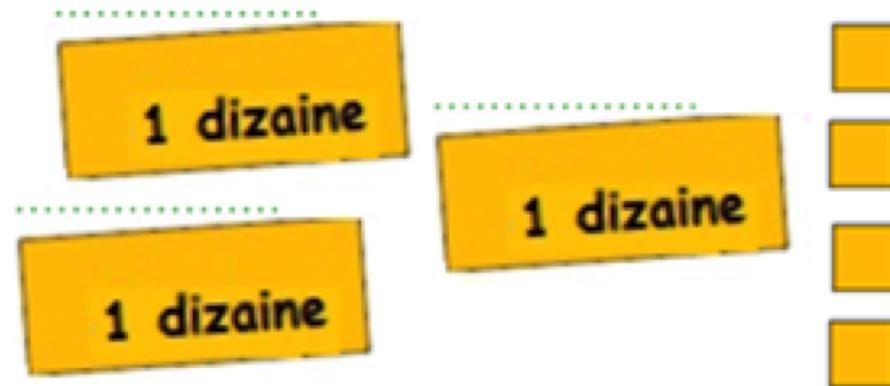
Exemple pour Rose

- Compter une par une chaque case jaune
- Compter les plaques de 10 (en disant : « dix, vingt ») puis compter un par un les plaques jaunes
- Compter les dizaines (3), puis les unités (6) et dire 36
- Utiliser la symbolisation $10 + 10 + 10 + 6 = 36$

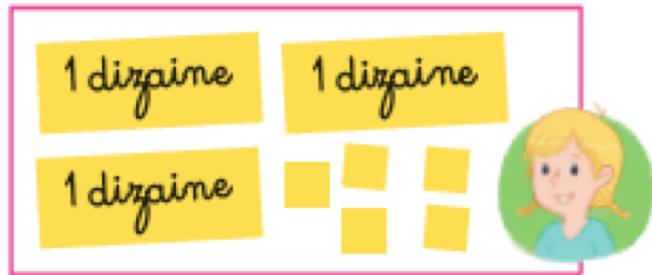
Pour Liam, un échange est nécessaire

L'évolution des procédures est soutenue par l'évolution du matériel proposé

le comptage un par un de toutes les cases jaunes n'est plus possible : la dizaine devient une unité de compte



Associer nombre, quantité et position sur la piste des nombres

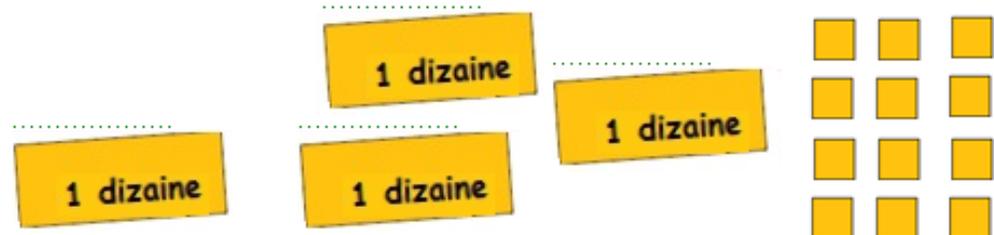


Avec son matériel,
sur quelle carte Rose arrive-t-elle?
Fais une croix sur cette carte
Combien de carreaux a-t-elle?



Sur la piste fais une croix
sur la carte 32

Entoure ce qu'il faut pour
atteindre la carte 32



Travail sur les écritures chiffrées et sur des lectures.

Complète.

56, c'est dizaines et unités.

63, c'est unités et dizaines.

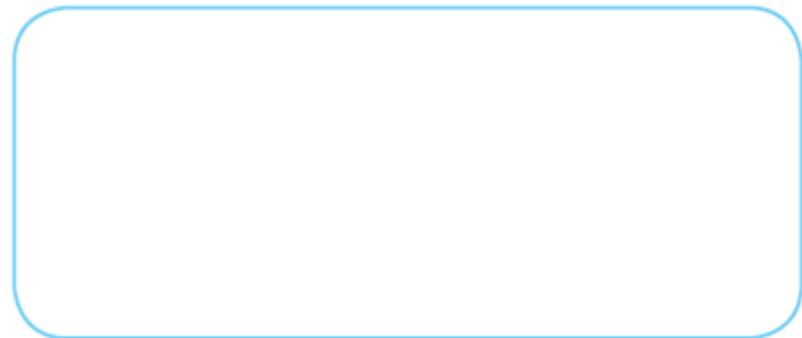
4 dizaines et 9 unités, c'est

7 unités et 2 dizaines, c'est

Réinvestissement dans des contextes variés évoqués

Avec 34 chocolats, combien de boîtes de 10 chocolats peut-on remplir ?

On peut remplir boîtes
et il reste chocolats.



De la piste des nombres au tableau de nombre

Structuration en dizaines, place du 0



DE L'ORAL **A L'ÉCRIT**

Tu apprends à écrire la suite des nombres dans un tableau.

	1	2	3		5	6	7	8	9
10							17		
20						26			
		32							
									49
	61					66		68	



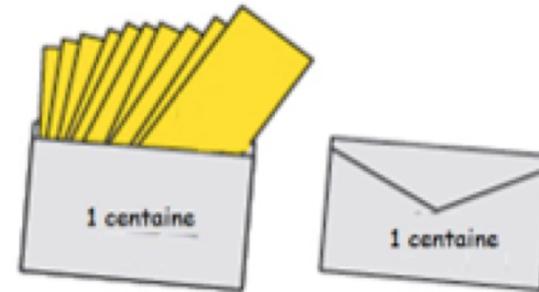
- 1 Écris les nombres dans les cases **bleues**.
- 2 **Dessine** la case où placer le nombre 0. **Écris-le**.
- 3 Écris les nombres dans les cases **roses**.
- 4 Écris en **vert** les nombres dont le chiffre des unités est 4.
- 5 Écris en **bleu** les nombres dont le chiffre des dizaines est 5.

En CE1 extension du champ numérique La centaine

Un exemple en CE1:

Le jeu de la centaine

1 centaine, c'est 10 dizaines
c'est 100 unités



$100 + 10 + 10 + 10 + 5$
1 centaine, 3 dizaines et 5 unités
135

Mais aussi
3 dizaines, 1 centaine et 5 unités
13 dizaines et 5 unités

Le tableau de numération: un outil

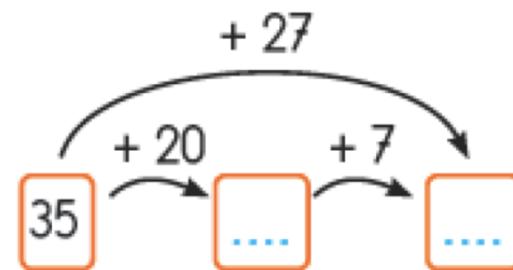
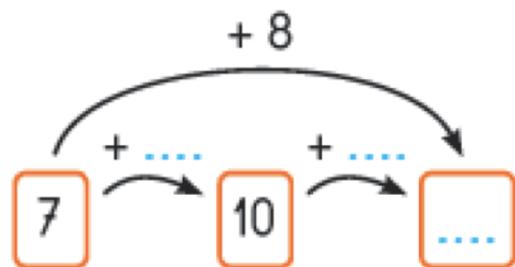
centaines	dizaines	Unités
		
		245
	24	5
2	4	5

Il est indispensable d'avoir compris le système d'écriture chiffrée pour maîtriser le calcul

Procédures de calculs évolutives, élaborées au sein de situations adéquates en lien avec le travail sur la numération

Exemples

- A l'écrit



$$35 + 27 = \dots\dots$$

17 + 27 = ?

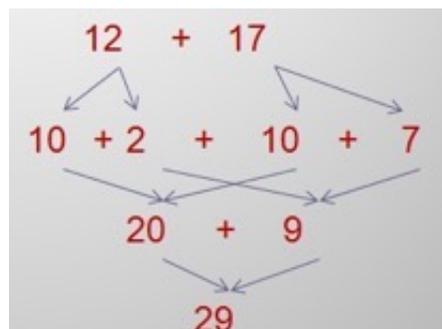
17 is represented by a blue box with '17' and a yellow box labeled '1 dizaine' with 10 yellow squares.

27 is represented by a blue box with '27' and three yellow boxes labeled '1 dizaine' with 10 yellow squares each.

$$7 + 7 = 10 + \dots\dots$$

$$10 + 20 + 10 = \dots\dots$$

$$17 + 27 = \dots\dots$$



$$\begin{array}{r} 37 \\ + 25 \\ \hline 12 \\ + 50 \\ \hline 62 \end{array}$$

1
J'ai écrit les unités sous les unités, les dizaines sous les dizaines.



	3	8
+	2	4
<hr/>		

2
8 unités + 4 unités, c'est 12 unités.
12 unités, c'est 1 dizaine et 2 unités.



3
Je pose 2 dans la colonne des unités et je retiens 1 que je place dans la colonne des dizaines.



	1	
	3	8
+	2	4
<hr/>		
		2

4
1 dizaine plus 3 dizaines plus 2 dizaines c'est 6 dizaines.



	1	
	3	8
+	2	4
<hr/>		
	6	2

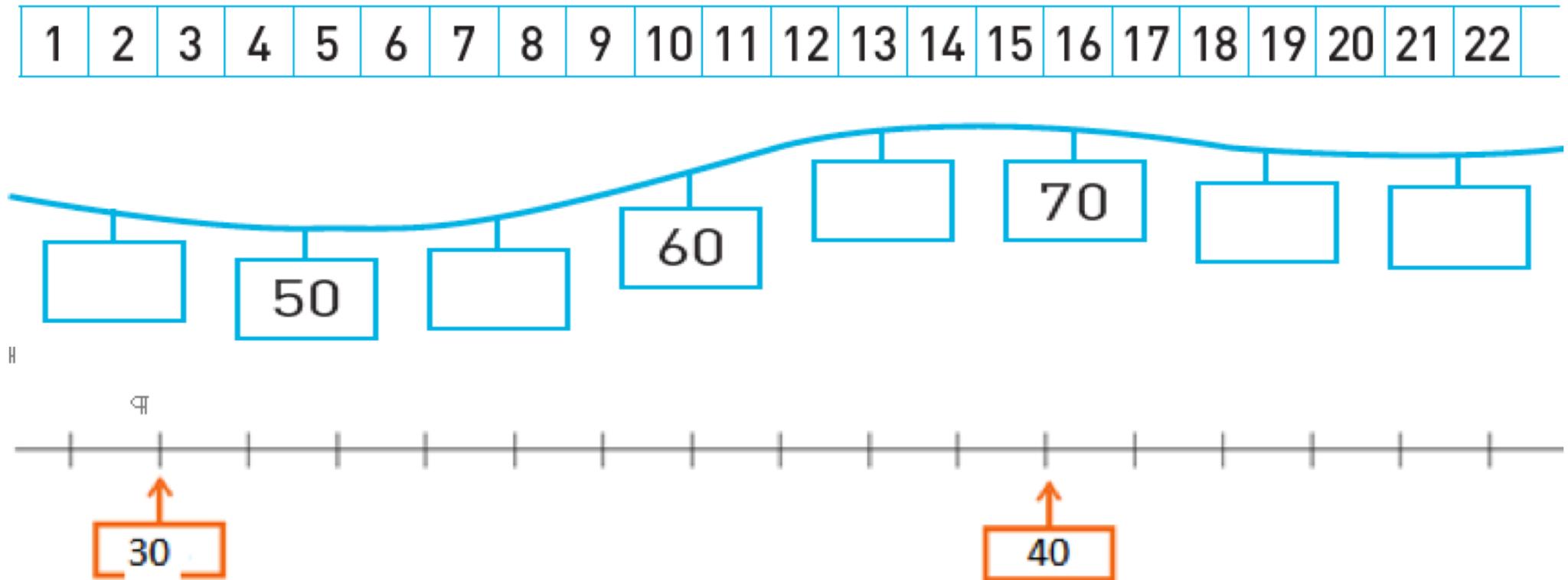
- À l'oral également
54 + 30, c'est 54 plus 3 dizaines donc 84
32 x 10, c'est 32 dizaines, c'est donc 320

Un changement de point de vue : du discret au mesurable

De la piste des nombres

à la droite numérique

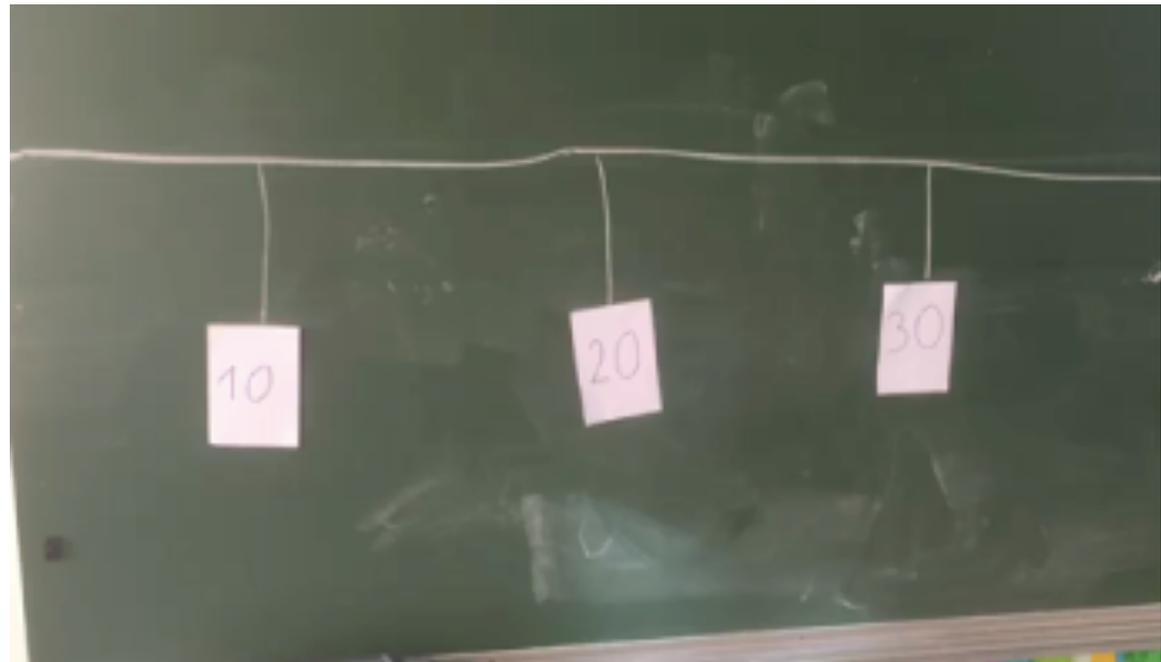
en passant par la file...



Et au CP continuer à associer nombre et position



Au CE1 de la piste à la file



Différentes échelles de graduation... ... vers la proportionnalité (CE1, CE2)

Pour représenter les nombres, on peut les placer

– sur une droite graduée de 1 en 1.



– sur une droite graduée de 10 en 10.



2 graduations qui se suivent
correspondent à 2 nombres
consécutifs,

à 2 dizaines
consécutives

– sur une droite graduée de 100 en 100.



ou à 2 centaines
consécutives.



2. La numération orale

- Un mode de groupements itérés par dix (numération décimale)
- des **mots-nombres** :
 - chiffres : un, deux, ...
 - multiples de la base : vingt, trente, ...
 - puissances de la base : dix, cent,
 - « anomalies »: onze, douze,.....

Combien ?...

- * de 1 jusqu'à 69 (*21 mots*)
- * de 1 jusqu'à 99 (*toujours 21 mots*)
- * de 1 jusqu'à 999 (*un seul mot de plus : cent*)
- * de 1 jusqu'à 999 999 (*un seul mot de plus : mille*)

Le mot zéro ne sert que pour dire le nombre 0

- des règles de juxtaposition des mots-nombres pour former des noms de nombres :

la juxtaposition des mots a une valeur opératoire (addition, multiplication)

sept - cent - quatre - vingt - dix - huit

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
7 100 4 20 10 8

$$(7 \times 100) + (4 \times 20) + 10 + 8$$

C'est la décomposition « auditive



Ce travail d'association des mots-nombres pour constituer des noms de nombres commence au CE1

DÉCOUVRONS ENSEMBLE

vingt(s)

sept

soixante

dix

quatorze

quatre

neuf



Avec 3 étiquettes,
je peux dire
quatre-vingt-
quatorze.

1 Écris en chiffres le nombre de Liam :

2 Avec ces étiquettes, **trouve** un nombre plus grand que celui de Liam.

Écris-le en lettres : en chiffres :

3 Complète.

$60 + 14 = 74$

$60 + 12 = \dots\dots$

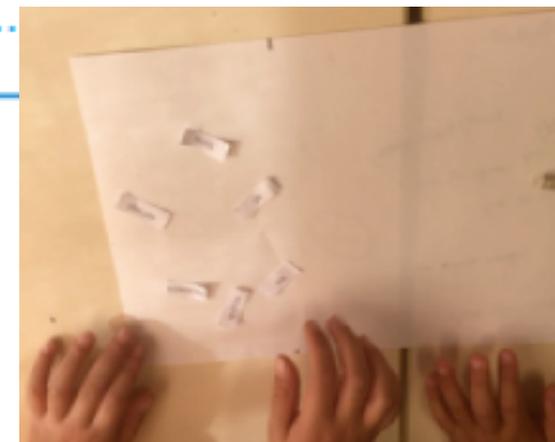
$60 + 8 = \dots\dots$

$60 + 10 + 8 = \dots\dots$

soixante-quatorze

.....

.....



Il se poursuit tout au long
des cycles 2 et 3

La question de l'institutionnalisation

Un des rôles fondamentaux du professeur est de permettre aux élèves de repérer, dans les activités qu'ils ont pratiquées, l'enjeu d'apprentissage

Il est donc indispensable de conclure les séances par un temps de synthèse co-construit donnant si possible lieu à un écrit (sous forme de dessin, de schéma, d'une phrase, éventuellement de photos) puis lorsque le savoir aura été suffisamment travaillé et entraîné, à un écrit « aide-mémoire » qui doit être appris et retenu.

Et en maternelle ?

« Qu'est-ce que j'ai appris? »

Utiliser des affichages pour les parents : des photos de l'activité résumant ce que les élèves ont découvert.

JEUX de SOCIETE



LA BESETTE



LE JEU DES BONBONS



LES DOMINOS



LE JEU DU LOUP

LE JEU DES VOITURES: SITUATION DE COMMUNICATION ÉCRITE



Les parkings sont sur la table, écriture du message



Préparation de la collection de voitures avec le message



Validation: c'est gagné... il ne reste pas de parkings vides, il y a juste ce qu'il faut de voitures



Validation: c'est perdu... il reste des parkings vides ou voitures dans le plateau
Il faut chercher la source de l'erreur et recommencer

Et quelques photos des jeux de société associés.

Des points importants à étudier en équipes de cycle

En cycle 1

- La répartition des grands domaines à aborder
- Les situations fondamentales à mettre en place aux différents niveaux

Pour vous aider

Un CDROM

« Apprentissages mathématiques à la maternelle »

*Joël Briand, Martine Loubet, Marie-Hélène Salin,
IUFM d'Aquitaine, DAEST Université Bordeaux 2
Editions Hatier*

- Le suivi des élèves

En cycle 2

- le travail systématique sur la dizaine, repris sur la centaine puis le millier
- le travail sur la piste des nombres puis la file numérique puis la droite numérique
- les jeux de calcul mental
- l'importance du travail sur des algorithmes de calcul évolutifs permettant de renforcer la compréhension de la numération, la mémorisation des faits numériques et participant à la construction du sens des opérations
- le choix des algorithmes qui seront enseignés et le moment de cet enseignement.

Pour vous aider

Les guides du professeur de la collection Opération Maths
*notre site : **Site <http://operation.maths.fr>***

En conclusion

La « construction du nombre » s'étale sur plusieurs années

Elle fait intervenir de nombreux savoirs : énumération, tri, sériation, représentation, codage et désignation, numération, opération....

Elle nécessite la mise en place d'activités de divers types :

- situations fondamentales
- jeux
- activités rituelles
- entraînement

et des phases d'institutionnalisation

Elle nécessite un accompagnement documenté, attentif et bienveillant du professeur

Merci de m'avoir écoutée !

